ايزومورفيزم الترتيب :

نقول عن التطبيق $f: E \to F$ بأنه إيزومورفيزم ترتيب إذا كان :

① f تقابل

② $x \leq y \Leftrightarrow f(x) \leq f(y)$

وهذا يعني أن كل من f و f^{-1} متزايد كما أنه متباين ومتباين فإن كل من f و f^{-1} متزايد تماماً

ملاحظة :

إذا كانت E سلسلة فإنه يمكن تعريف إيزومورفيزم الترتيب بأنه تقابل متزايد وذلك لأن :

$$f(x) \leq f(y) \Rightarrow y \nleq x$$

لأنه لو كان خلاف ذلك لكان :

$x \leq y$ ← $f(y) \leq f(x)$ ← متزايد f و $y \leq x$ (ذات سلسلة) وهذا خلاف للفرض

العناصر الخاصة :

لتكن المجموعة المرتبة $(E, \leq)$ لنعرف فيها أربعة عناصر تلعب دوراً هاماً في المجموعات المرتبة

① العنصر الأعظمي :

نسمي العنصر M من E عنصراً أعظمياً في E إذا كان من أجل أي $x \in E$ فإن $x \ngeq M$ (هذا يعني إما $M \geq x$ أو x , M غير متقارنين)

مثال :

لتكن $E = \{2, 3, 4, 9\}$ مرتبة بعلاقة يقسم , فإن 4 , 9 عنصرين أعظميين

② العنصر الأكبر :

نسمي العنصر b العنصر الأكبر في E إذا كان من أجل أي $x \in E$ فإن $b \geq x$

(إن هذا العنصر إن وجد فهو وحيد)

لأنه إذا فرضنا جدلاً أنه يوجد عنصر أكبر آخر مثل b' فإنه يكون

$$b \geq b' \quad , \quad b' \geq b \Rightarrow b = b'$$

مثال :

[illegible] في المثال السابق المجموعة E لا تحوي عنصر أكبري

مثال :

إذا كانت $E=\{2,3,6\}$ مع علاقة التقسيم المرتبة فإن 6 عنصر أكبري في E

③ الحد الأعلى لمجموعة جزئية :

نسمي العنصر m من E حداً أعلى للمجموعة A من E إذا كان من أجل أي عنصر $x\in A$ فإن $x\leq m$

مثال :

لتكن $A=\{2,3,4,9\}$ مجموعة جزئية من $(\mathbb{N}^*,|)$ فإن كل من 36 , 72 هو حد أعلى للمجموعة A في $\mathbb{N}^*$

ملاحظات :

① إذا كان الحد الأعلى m للمجموعة A ينتمي إلى A عندئذ يكون هو نفسه العنصر الأكبر للمجموعة A من أجل الترتيب المولد (أثر الترتيب على A)

② نقول عن مجموعة جزئية A التي تقبل على الأقل حداً أعلى في E بأنها محدودة من الأعلى في E

③ إذا كان $m\in E$ ليس حداً أعلى للمجموعة A هذا يعني بأنه يوجد $x\in A$ بحيث يكون $x\nleq m$ ومنه نستنتج أن المجموعة الخالية ϕ من E تقبل أي عنصر من E كحد أعلى

④ الحد الأعلى الأصغري

نسمي العنصر s من E بالحد الأعلى الأصغري للمجموعة A في E إذا حقق ما يلي :

1 - من أجل أي $x\in A$ فإن $x\leq s$ (أي أنه حد أعلى لجميع عناصر A)

2 - من أجل أي حد أعلى m للمجموعة A فإن $s\leq m$

ونلاحظ أن مثل هذا العنصر إن وجد فهو وحيد ونرمز للعنصر s بالرمز $s=\sup_E A$

مثال :

- إذا كانت $A = \{2, 3, 4, \dots\}$ مجموعة جزئية من $(N^*, \leq)$ فإن العدد 2 هو الحد الأدنى الأعظمي للمجموعة A في E

- مجموعة الأعداد الزوجية من المجموعة $(N, \leq)$ لا تملك حد أعلى وبالتالي لا تملك حداً أعلى أصغري
$A = Q \cap [0, \sqrt{2}]$ مجموعة جزئية من $(Q, \leq)$ فإن A تملك حد أعلى مثل 2 ولكنها لا تملك حد أعلى أصغري

ملاحظة :

① إن وجد العنصر $\sup_E A = s$ وإذا كانت $s \in A$ فإن s يكون العنصر الأكبر في A

② وبالعكس إذا كانت A تملك عنصر أكبر من أجل الترتيب المعرف عندئذٍ يكون أيضاً هو الحد الأعلى الأصغري لـ A

③ مجموعة الحدود العليا للمجموعة ϕ في E هي E ولذلك إن الحد $\sup_E \phi$ موجود في حالة أن E تملك عنصر أصغر وبأسلوب مشابه يمكن أن نعرف عناصر مميزة أخرى

① العنصر الأصغري
هو العنصر m' من E الذي يحقق من أجل أي عنصر $x \in E$ فإن $x \not< m'$

② العنصر الأصغر
هو العنصر m' من E الذي يحقق الشرط من أجل أي عنصر $x \in E$ فإن $x \geq m'$

③ الحد الأدنى للمجموعة
إذا كانت $A \subseteq E$ فإن الحد الأدنى للمجموعة A في E هو العنصر $m' \in E$ بحيث يكون

$$\forall x \in A \Rightarrow m' \leq x$$

④ الحد الأدنى الأعظمي
الحد الأدنى الأعظمي للمجموعة A من E هو العنصر I من E الذي يحقق الشرطين :

أ- I هو حد أدنى للمجموعة A في E

ب- مقابل أي حد أدنى m فإن $I \ge m$ ونرمز له الأدنى الأعظمي I بالرمز $I=\inf_E A$

مبرهنة:

إذا كانت $B \subseteq A \subseteq E$ فإن $\sup_E B \le \sup_E A$ ، $\inf_E A \le \inf_E B$

البرهان:

نفرض أن $s=\sup_E A$ ⇐ s هو حد أعلى للمجموعة A في E و $B \subseteq A$ ⇐ s هو حد أعلى للمجموعة B في E ⇐ $\sup_E B \le \sup_E A$

نفرض أن $I=\inf_E A$ ⇐ I هو حد أدنى للمجموعة A في E و $B \subseteq A$ ⇐ I هو أدنى للمجموعة B في E ⇐ $\inf_E A \le \inf_E B$

مبرهنة:

إذا كانت $A \subseteq F \subseteq E$ فإن $\sup_E A \le \sup_F A$ ، $\inf_F A \le \inf_E A$

البرهان:

إذا كانت $s'=\sup_F A$ ⇔ s' هو حد أعلى للمجموعة A في F وبما أن $F \subseteq E$ ⇐ s' هو حد أعلى للمجموعة A في E ⇐ $\sup_E A \le s'$ ⇐ $\sup_E A \le \sup_F A$

إذا كانت $I'=\inf_F A$ ⇐ I' هو حد أدنى للمجموعة A في F و $F \subseteq E$ ⇐ I' هو حد أدنى للمجموعة A في E ⇐ $I' \le \inf_E A$ ⇐ $\inf_F A \le \inf_E$

ملاحظة:

متى يكون $\sup_E A = \sup_F A$ يلزم ويكفي أن يكون $\sup_E A \in F$

مثال:

إذا أخذنا المجموعة الحقيقية $(R, \le)$ وإذا كانت $A=[0,1[\cup]2,3]$ ، $B=[0,1[$

فإن $\sup_R B = 1 \le \sup_R A = 3$ ، $\sup_R B = 1 \le \sup_A B = 2$

مبرهنة:

إذا كان $f: E \to F$ ايزومورفيزم ترتيب، وإذا كانت $A \subseteq E$ تملك حد أعلى أصغري s في E فإن $f(A)$ تملك عندئذ حد أعلى أصغري في F هو $f(s)$ أي أن:

$$f(\sup_E A) = \sup_F (f(A))$$

البرهان:

لتكن $x' \in f(A) \Leftarrow$ توجد $x \in A$ بحيث يكون $x' = f(x) \Leftarrow x \leq s \Leftarrow x' = f(x) \leq f(s)$

أي أن $f(s)$ هو حد أعلى للمجموعة $f(A)$ في F

لتكن m' حد أعلى للمجموعة $f(A)$ في $F \Leftarrow$ يوجد $m \in E$ بحيث يكون $m' = f(m)$ ومن أجل أي $x \in A$ فإن $f(x) \leq f(m) = m' \Leftarrow$ (لأن f ايزومورفيزم) $x \leq m \Leftarrow m$ هو حد أعلى للمجموعة A في E

$\Leftarrow s \leq m \Leftarrow f(s) \leq f(m) = m' \Leftarrow f(s)$ هو حد أعلى أصغري للمجموعة $f(A)$ في F

المجموعات شبه الاستقرائية:

نقول عن المجموعة المرتبة E أنها شبه استقرائية إذا كانت كل سلسلة (غير خالية) من E تملك حد أعلى في E

ونقول عن المجموعات المرتبة E أنها استقرائية إذا كانت كل سلسلة (غير خالية) من E تملك حد أعلى أصغري

نظرية زورن (Zorn): تقبل بدون برهان

إذا كانت E شبه استقرائية فإنه من أجل أي عنصر $a \in E$ يوجد على الأقل عنصر أعظمي M من E بحيث يكون $M \geq a$

تمثيل المجموعات المرتبة المنتهية:

إذا كانت $(E, \leq)$ مجموعة مرتبة و $x, y \in E$ فإننا نقول أن العنصر y يغطي العنصر x إذا كان:

أ- $x \leq y$

ب- إذا لم يكن بالإمكان إيجاد عنصر مثل z يحقق $x \leq z \leq y$

مبرهنة:

في أي مجموعة مرتبة منتهية يكون:

① كل عنصر غير الصفري يغطي من الأقل عنصراً واحداً
② كل عنصر غير الأعظمي يكون مغطى بعنصر واحد من الأقل

البرهان:

ليكن y عنصر غير الصفري فمن البديهي أنه يوجد عنصر من الأقل مثل x_1 بحيث يكون $x_1 < y$
إذا كان y يغطي x_1 يكون تم المطلوب
أما إذا لم يكن كذلك فإنه يوجد عنصر مثل x_2 بحيث يكون $x_1 < x_2 < y$ إذا كان y يغطي x_2 يكون تم المطلوب
أما إذا لم يكن كذلك فإنه يوجد عنصر مثل x_3 بحيث يكون $x_1 < x_2 < x_3 < y$ وهكذا...
وبما أن المجموعة منتهية فإننا سنحصل حتماً على x_n الذي يكون مغطى بـ y

② تبرهن بنفس طريقة البرهان على ١)

التمثيل بالرسم (أو بالمخططات)

لتكن $(A, \leq)$ مجموعة مرتبة منتهية فيمكن تمثيلها كما يلي
- كل عنصر من عناصرها نمثله بنقطة واحدة من المخطط
- إذا كان العنصر y يغطي x فإن النقطة x ترتبط بـ y بواسطة قطعة مستقيمة بينهما وتكون صاعدة

إن العناصر الأصغرية (الدنيا) تمثل الجزء السفلي (أو العلوي) من الشكل وإن أي عنصرين يكونان متقارنين إذا وفقط إذا كانا مرتبطين بما بينهما بخط صاعد

أمثلة:

في الأمثلة الآتية جميعها مجموعات جزئية منتهية من المجموعة المرتبة $(\mathbb{N}^*, |)$

① {6, 12, 18, 36}

② {2, 3, 6, 7, 9, 42}

(3) $\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$

30, 10, 6, 15, 5, 2, 3, 1

الشبكات :

تعريف :

لتكن $(E, \leq)$ مجموعة مرتبة نقول بأن E هي نصف شبكة عليا إذا كان أي زوج من عناصرها مثل $\{x, y\}$ يملك حداً أعلى أصغري في E ونكتب $\sup\{x,y\} = x \vee y$ (وتقرأ x أو y)

وبعض الكتب تستخدم الرموز $x \vee y = x \cup y = x + y$

ونقول بأن E هي نصف شبكة دنيا إذا كان أي زوج من عناصرها مثل $\{x, y\}$ يملك حد أدنى أعظمي في E ونكتب $\inf_E \{x, y\} = x \wedge y$ (وتقرأ x و y) وبعض الكتب تستخدم الرموز $x \wedge y = x \cap y = xy$

تقول عن E أنها شبكة إذا كانت في نفس الوقت نصف شبكة عليا ونصف شبكة دنيا ونلاحظ أن نصف الشبكة الدنيا من أجل علاقة الترتيب $\leq$ ما هي إلا نصف شبكة عليا من أجل علاقة الترتيب $\geq$

أمثلة :

① من أجل أي مجموعة E فإن $(P(E), \subseteq)$ هي شبكة فإذا كانت X, Y مجموعتان جزئيتان في E يكون $X \vee Y = X \cup Y$ $\quad X \wedge Y = X \cap Y$

② $(\mathbb{N}^*, |)$ تكون شبكة حيث

$x \vee y = lcm(x, y)$ حيث lcm المضاعف المشترك الأكبر

$x \wedge y = gcd(x, y)$ و gcd القاسم المشترك الأعظم

③ كل سلسلة تكون شبكة حيث $x \vee y = max(x, y)$

$x \wedge y = min(x, y)$

ملاحظة :

في نصف الشبكة العليا $(E, \leq)$ فإن قانون الربط $x \vee y$ يحقق الخواص التالية

① الجامعية (أي أن $x \vee x = x$)

② التبديلية (أي أن $x \vee y = y \vee x$)

التجميعية (أي أن $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$)

البرهان:

الخاصة الأولى والثانية واضحتين من التعريف مباشرة

لنبرهن الخاصة التجميعية:

نفرض أن $s = x \vee (y \vee z)$ ⇐ $s \geq x$ و $s \geq y \vee z$ ⇐ $s \geq z$ و $s \geq y$

و $s \geq x$ ⇐ $s \geq x \vee y$ و $s \geq z$ ⇐ $s \geq (x \vee y) \vee z$

أي أن s حد أعلى للمجموعة المؤلفة من العنصرين $\{x \vee y, z\}$

نفرض أن m حد أعلى للمجموعة $\{x \vee y, z\}$ عندئذٍ يكون $m \geq x \vee y$ و $m \geq z$

⇐ $m \geq x$ و $m \geq y$ و $m \geq z$ ⇐ $m \geq x$ و $m \geq y \vee z$

⇐ $m \geq x \vee (y \vee z)$ ⇐ $m \geq s$ وبالتالي فإن s حد أعلى أصغري للمجموعة $\{x \vee y, z\}$ أي أن:

$s = (x \vee y) \vee z$ ⇐ $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$

ملاحظة:

يمكن البرهان بطريقة أخرى

نفرض أن $s = x \vee (y \vee z)$ و $m = (x \vee y) \vee z$ ونبرهن أن $s \leq m$ و $m \leq s$

⇐ $m = s$

ملاحظة:

إن هذه البرهنة تكون أيضاً صحيحة من أجل نصف الشبكة الدنيا مع تانون التشكيل الداخلي $x \wedge y$

- البرهان السابق يبين أن $s = x \vee (y \vee z)$ هو $\sup_E \{x, y, z\}$ فيمكن أن نكتب بشكل بسيط $x \vee y \vee z$ بدلاً من $x \vee (y \vee z)$

بهذه يمكن أن نستنتج أن كل مجموعة جزئية منتهية غير خالية من نصف شبكة عليا تملك حد أعلى أصغري ولها نتيجة مشابهة من أجل نصف الشبكة الدنيا. أي أنه أي مجموعة جزئية منتهية غير خالية من نصف شبكة دنيا تملك حد أدنى أعظمي